

Universidade Federal de Pernambuco

Departamento de Física

**Exame Geral de Doutorado**

Segundo Semestre de 2021

**Eletrodinâmica Clássica**

27/09/2021 - 13h00 às 16h00

(Escolha três dentre as quatro questões.)

(Não escreva seu nome na prova. Informe apenas o CPF.)

**QUESTÃO 1 – EQUAÇÃO DE LAPLACE**

Uma folha metálica de espessura desprezível é usada para construir um tubo circular muito longo e de raio  $b$ . Esse tubo é orientado ao longo do eixo  $z$ , e então cortado longitudinalmente, com uma metade sendo mantida a um potencial constante  $V = +V_0$  e a outra a um potencial  $V = -V_0$ . Considere o eixo de simetria do tubo alinhado com o eixo  $z$  de um sistema de coordenadas cilíndricas  $(r, \varphi, z)$ .

- (a) (10%) Estabeleça as condições de contorno apropriadas para o potencial na superfície do tubo.

Considere a solução da Equação de Laplace para um sistema com simetria cilíndrica na forma,

$$V(r, \varphi) = \sum_{n \neq 0} \{ [A_n \sin(n\varphi) + B_n \cos(n\varphi)] r^n + [A'_n \sin(n\varphi) + B'_n \cos(n\varphi)] r^{-n} \}$$

- (b) (10%) Encontre os coeficientes não-nulos na região interna ao tubo ( $r < b$ ).
- (c) (35%) Encontre o potencial na região interna ao tubo determinando os coeficientes  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $A'_n$  e  $B'_n$ , de acordo com as condições de contorno estabelecidas no item (a).
- (d) (10%) Encontre os coeficientes não-nulos na região externa ao tubo ( $r > b$ ).
- (e) (35%) Encontre o potencial na região externa ao tubo determinando os coeficientes  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $A'_n$  e  $B'_n$ , de acordo com as condições de contorno estabelecidas no item (a).

---

**Dados:**

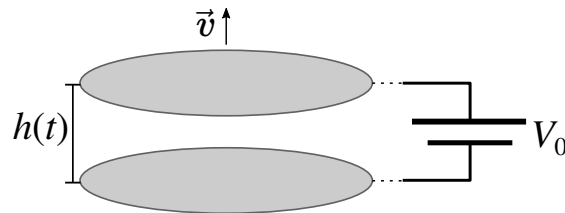
$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \cos(m\varphi) \cos(n\varphi) = \begin{cases} 2\pi, & \text{p/ } m = 0 = n \\ \pi\delta_{mn}, & \text{outros casos} \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \sin(m\varphi) \sin(n\varphi) = \pi\delta_{mn}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} d\varphi \sin(m\varphi) \cos(n\varphi) = 0$$

**QUESTÃO 2 – CAMPO ELETROMAGNÉTICO EM UM CAPACITOR**

Um capacitor plano consiste de duas placas metálicas circulares de raio  $a$ , separadas por uma distância  $h(t) \ll a$  no instante de tempo  $t$ . As placas estão conectadas a uma fonte que mantém uma diferença de potencial  $V_0$  constante entre elas. Em um determinado momento, uma das placas começa a se mover com uma velocidade  $v$  muito pequena e constante, se afastando da outra, que permanece fixa.

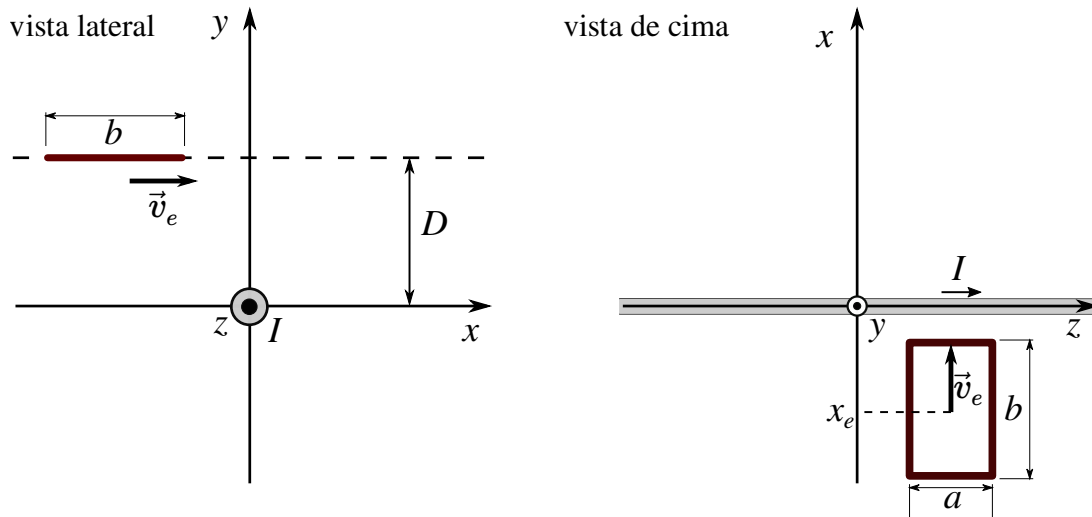


Desprezando efeitos de borda e admitindo que a velocidade  $v$  é pequena o suficiente para que correções de primeira ordem no campo magnético não precisem ser consideradas, calcule:

- (a) (20%) A força que deve ser aplicada para manter a velocidade  $v$  constante.
- (b) (20%) A taxa de variação temporal da energia eletromagnética  $U$ .
- (c) (20%) O campo magnético entre as placas.
- (d) (30%) O vetor de Poynting correspondente e o seu fluxo através da superfície cilíndrica coaxial com o capacitor e delimitada pelas placas.
- (e) (10%) Mostre que o fluxo do vetor de Poynting deve ser igual à potência absorvida pela fonte de tensão.

**QUESTÃO 3 – LEI DA INDUÇÃO DE FARADAY**

Um fio retilíneo infinito orientado ao longo do eixo  $z$  transporta uma corrente elétrica  $I$  (ver figura). Uma espira condutora retangular, de arestas  $a$  e  $b$ , se move na direção  $x$  positivo, com velocidade constante  $\vec{v}_e = v_e \hat{x}$ , a uma distância  $D$  do plano  $xz$ . A coordenada  $x$  do centro da espira é denotada por  $x_e$ . Considere o sentido de circulação positivo aquele associado (pela regra da mão direita) ao vetor normal à espira no sentido  $y$  positivo.



Determine, em termos de  $I$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $D$ ,  $x_e$  e  $v_e$ :

- (a) (35%) o fluxo magnético através da espira;
- (b) (35%) a força eletromotriz induzida na espira;
- (c) (30%) os valores de  $x_e$  para os quais a corrente induzida inverte o sentido. Identifique o sentido da corrente elétrica induzida como função de  $x_e$ , justificando sua resposta.

**Dados:**

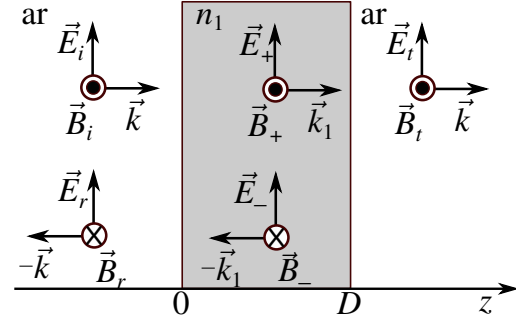
Os versores para coordenadas polares  $\hat{r}$  e  $\hat{\theta}$  são dados por:

$$\hat{r} = \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y}$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y}$$

### QUESTÃO 4 – PROPAGAÇÃO DE ONDAS ELETROMAGNÉTICAS

Uma onda monocromática plana, de frequência angular  $\omega$  e se propagando na direção  $z$ , incide normalmente sobre um material dielétrico, não magnético, de índice de refração  $n_1$  e espessura  $D$  (ver figura). Dentro do dielétrico o campo elétrico pode ser expresso



como  $\vec{E} = (E_+ e^{ik_1 z} + E_- e^{-ik_1 z}) \hat{x}$ , onde  $k_1 = n_1 \omega / c$  e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.

- (a) (15%) Denotando por  $\mathbf{E}(0) = \begin{pmatrix} E_+(0) \\ E_-(0) \end{pmatrix}$  e  $\mathbf{E}(D) = \begin{pmatrix} E_+(D) \\ E_-(D) \end{pmatrix}$  os campos elétricos no início e no final da camada dielétrica, mostre que  $\mathbf{E}(D) = \mathbf{T}^{(\text{camada})} \mathbf{E}(0)$ , onde

$$\mathbf{T}^{(\text{camada})} = \mathbf{I} \cos(k_1 D) + i \sigma_3 \sin(k_1 D).$$

Aqui,  $\mathbf{I}$  é matriz identidade e  $\sigma_3$  é uma das matrizes de Pauli.

- (b) (40%) A partir das condições de contorno na interface entre dois meios  $a$  e  $b$ , de índices de refração  $n_a$  e  $n_b$ , obtenha  $\mathbf{E}_b = \mathbf{T}_{a \rightarrow b}^{(\text{interface})} \mathbf{E}_a$ , onde

$$\mathbf{T}_{a \rightarrow b}^{(\text{interface})} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{n_a}{n_b} \right) \mathbf{I} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{n_a}{n_b} \right) \sigma_1.$$

$\sigma_1$  é uma das matrizes de Pauli.

- (c) (25%) Mostre que as amplitudes dos campos elétricos incidente,  $E_i$ , refletido  $E_r$  e transmitido  $E_t$  pela camada dielétrica satisfazem

$$E_t = \frac{\det \mathbf{T}}{T_{22}} E_i, \quad E_r = -\frac{T_{21}}{T_{22}} E_i,$$

onde  $T_{kl}$  são os elementos da matriz transferência  $\mathbf{T}$  referente à propagação da onda por todas as interfaces e a camada dielétrica.

- (d) (20%) Obtenha a matriz transferência  $\mathbf{T}$ .

**Dados:** Acima,  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$  são as matrizes de Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

que satisfazem as identidades:  $\sigma_k^2 = \mathbf{I}$ ,  $\sigma_j \sigma_k = i \varepsilon_{jkl} \sigma_l$